Конвергенција несвојствених интеграла функција са промјенљивим знаком

Теорема: (Дирихлев критеријум) Ако су испуњени услови

1) ф-ја f има ограничену примитивну ф-ју F, тј. $|F(x)| \leq C$, за $x \in [a, +\infty)$

2) ф-ја g је непрекидно диференцијабилна на $[a, +\infty)$ и монотоно тежи 0 за $x \to +\infty$

тада интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

конвергира.

Теорема: (Абелов критеријум) Ако су испуњени услови:

1) несвојствени интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ конвергира

2) ф-ја g је монотона и ограничена на $[a, +\infty)$

тада интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

конвергира.

Исте теореме важе и за $\int_{-\infty}^{b} f(x)g(x)dx$ и $\int_a^b f(x)g(x)dx$, гдје ф-ја $f(x)g(x)$ није ограничена у околини тачке a (b).

1. Користећи Дирихлеов критеријум доказати конвергенцију интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{1+x^n}\,dx, \quad n \geq 0, a \neq 0$$

Очигледно, једини сингуларитет код ова интеграла је $+\infty$. Пошто подинтегралне ф-је мијењају знак на $[0,+\infty)$, не можемо примјењивати претходни критеријум.

Прво, изаберемо

$$f_1(x)=\cos ax, \quad f_2(x)=\sin ax, \quad g(x)=\frac{1}{1+x^n}$$

Очигледно, примитивне ф-је ф-ја f_1 и f_2 су

$$F_1(x)=\frac{\sin ax}{a}, \quad F_2(x)=\frac{-\cos ax}{a}$$

и важи

$$|F_1(x)|=\left|\frac{\sin ax}{a}\right| \leq \frac{1}{|a|}, \quad |F_2(x)|=\left|\frac{-\cos ax}{a}\right| \leq \frac{1}{a}, \quad \forall x \in [0,+\infty)$$

Дакле, f_1 и f_2 имају ограничене примитивне ф-је.

Даље, $g(x)$ је непрекидно диференцијабилна на $[0,+\infty)$ (јер је $1+x^n \neq 0$ $\forall x \in [0,+\infty)$, и $1+x^n$ је непр. диф. на $[0,+\infty)$).

$$g'(x)=\left((1+x^n)^{-1}\right)'=-(1+x^n)^{-2}\cdot nx^{n-1}=\frac{-nx^{n-1}}{1+x^n}<0 \quad \forall x \in [0,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) \downarrow \text{ на } [0,+\infty)$$

Пред тога, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^n}=0$.

Дакле, пошто ф-ја f_1, односно f_2, има ограничену примитивну ф-ју на $[0,+\infty)$, а ф-ја g је непрекидно диференцијабилна на $[0,+\infty)$, монотоно опадајућа и тежи 0 кад $x\to+\infty$, закључујемо да интеграли

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)g(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^n}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} f_2(x)g(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{1+x^n}\,dx$$

конвергирају.

2. Користећи Дирихлеов критеријум доказати да интеграли

$$\int_a^{+\infty} \frac{\sin bx}{x^\alpha}\,dx,\quad \int_a^{+\infty} \frac{\cos bx}{x^\alpha}\,dx,\quad a>0,\ b\neq 0$$

конвергирају за $\alpha>0$.

Видимо да је $+\infty$ једини сингуларитет за оба интеграла.

Изаберимо $f_1(x)=\sin bx$, $f_2(x)=\cos bx$, $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

Примитивне ф-је ф-ја f_1 и f_2 су

$$F_1(x)=\frac{-\cos bx}{b},\quad F_2(x)=\frac{\sin bx}{b}$$

и важи $|F_1(x)|\leq\frac{1}{b}$, $|F_2(x)|\leq\frac{1}{b}$ $\forall x\in[a,+\infty)$.

Ф-ја $g(x)$ је непрекидно диференцијална на $[a,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$ за $\alpha>0$, и $g'(x)=\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}<0$ $\forall x\in[a,+\infty)$, па је g монотоно опадајућа на $[a,+\infty)$ за $\alpha>0$.

Како ф-је f_1 и f_2 имају ограничене примитивне ф-је на $[a,+\infty)$, а ф-ја g је непрекидно диференцијабилна на $[a,+\infty)$ и монотоно тежи 0 кад $x\to+\infty$, закључујемо да интеграли

$$\int_a^{+\infty} f_1(x)g(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\frac{\sin bx}{x^\alpha}\,dx$$

$$\int_a^{+\infty} f_2(x)g(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\frac{\cos bx}{x^\alpha}\,dx$$

конвергирају.

3. Користећи Абелов критеријум доказати да интеграл
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx, \ (a>0)$$
конвергира.

Видимо да је $+\infty$ сингуларитет, и да је 0 потенцијални сингуларитет јер подинтегрална ф-ја није дефинисана у 0. Како је
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+a)} = 1\cdot\frac{1}{0+a} = \frac{1}{a}$$
то закључујемо да 0 није сингуларитет овог интеграла.

Даље, раставимо интеграл на
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx = \int_0^{c} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx + \int_c^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx$$
Интеграл $\int_0^{c} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx$ је Риманов, па треба доказати конвергенцију интеграла
$$\int_c^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+a)}\,dx.$$
Тачку c ћемо изабрати тако да су на интервалу $[c,+\infty)$ испуњени услови Абеловог критеријума за ф-је f и g (које ћемо сада изабрати).

Изаберимо $f(x)=\frac{\sin\sqrt{x}}{x+a}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Очигледно, ф-ја $g(x)$ је ограничена на $[c,+\infty)$ $\left(|g(x)|\le\frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ и монотоно опадајућа $\left(g'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}<0, \forall x>c\right)$ за било које $c>0$. $(*)$

Треба још доказати да

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx = \int_c^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x+a}\,dx \text{ конвергира.}$$

Ово ћемо доказати користећи Дирихлеовог критеријума.

$$\int_c^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x+a}\,dx = \int_c^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\frac{\sqrt{x}}{x+a}\,dx = \int_c^{+\infty} f_1(x)g_1(x)\,dx$$

гдје је $f_1(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $g_1(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+a}$.

Примитивна ф-ја ф-је $f_1(x)$ је

$$F_1(x) = \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt \end{array}\right] = 2\int \sin t\,dt = -2\cos t = -2\cos\sqrt{x}$$

па је $|F_1(x)| = |-2\cos\sqrt{x}| \le 2$ $\forall x \in [c, +\infty)$. Дакле, f_1 има ограничену примитивну ф-ју на $[c, +\infty)$. Даље, $g(x)$ је непрекидно диференцијабилна на $[c, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, и $g'(x) = \frac{a-x}{2\sqrt{x}\,(x+a)^2} \le 0$ за $x > 0$. Дакле, $g(x)$ је монотоно опадајућа на $[a, +\infty)$, па ћемо изабрати $c = a$. Дакле, по Дирихлеовом критеријуму, $\int_a^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x+a}\,dx$ конвергира. (**)

Из * и ** закључујемо по Абеловом критеријуму, да $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x+a)}\,dx$ конвергира.

На крају, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x+a)}\,dx = \int_0^{a} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x+a)}\,dx + \int_a^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(x+a)}\,dx$ конвергира, као збир конвергентних интеграла.

4. Користећи Абелов критеријум доказати да интеграл
$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx\ ,\ (a,b>0)$$
конвергира.

Видимо да је $+\infty$ једини сингуларитет. Подинтегрална ф-ја је променљивог знака, па не можемо користити поредбени критеријум. Опет, растављамо интеграл на
$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx = \int_0^{c} x^a e^{-bx}\cos x\,dx + \int_c^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx .$$
Очигледно је $\int_0^{c} x^a e^{-bx}\cos x\,dx$ Риманов интеграл за $\forall c>0$, па само треба доказати конвергенцију интеграла
$$\int_c^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx$$
Тачку c ћемо изабрати тако да услови Абеловог критеријума буду испуњени за ф-је f и g.

Дакле, имамо
$$\int_c^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx = \int_c^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a}\cdot x^{2a} e^{-bx}\,dx = \int_c^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$
где је $f(x)=\frac{\cos x}{x^a}$, $g(x)=x^{2a}e^{-bx}$. Доказали смо да $\int_c^{+\infty}\frac{\cos x}{x^a}\,dx$ конвергира за било које $c>0$.$^{(*)}$ Треба још доказати да је ф-ја g монотона и ограничена.
$$g'(x)=x^{2a-1}e^{-bx}(2a-bx)\le 0 \text{ за } x\ge \frac{2a}{b},$$
па је ф-ја g монотона на $\left[\frac{2a}{b},+\infty\right)$. Дакле, узећемо $c=\frac{2a}{b}$. Даље, пошто је g опадајућа на $\left[\frac{2a}{b},+\infty\right)$, то је $0\le g(x)\le g\left(\frac{2a}{b}\right)$ $\forall x\ge\frac{2a}{b}$, па је ф-ја g ограничена на $\left[\frac{2a}{b},+\infty\right)$. $(**)$

Значи, из * и ** закључујемо по Абеловом критеријуму, да

$$\int_{\frac{2a}{b}}^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx$$ конвергира, па конвергира и

$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{2a}{b}} x^a e^{-bx}\cos x\,dx + \int_{\frac{2a}{b}}^{+\infty} x^a e^{-bx}\cos x\,dx$$

Апсолутна и условна конвергенција

Дефиниција: Нека је ф-ја $f(x)$ дефинисана на одсјечку $[a,+\infty)$ и интеграбилна на сваком сегменту који је подскуп одсјечка $[a,+\infty)$. За несвојствени интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

кажемо да апсолутно конвергира ако конвергира интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Теорема: Из апсолутне конвергенције несвојственог интеграла слиједи његова конвергенција.

Дефиниција: Несвојствени интеграл условно конвергира ако конвергира али не конвергира апсолутно.

Бројни редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако $\exists \lim_{n\to\infty} S_n$.

Теорема: Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тада $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Теорема: (Коши) Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

1. Испитати конвергенцију редова:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$S_{n+p} = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{1}{i} \quad , n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}$$

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=1}^{n+p} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i} \right| = \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{i} \geq$$

$$\geq \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$$

За $p=n$ добијамо $|S_{2n} - S_n| \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Дакле,

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall N > 0 \quad \exists p = N$ т.д. $|S_{n+p} - S_n| \geq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2},\ n\in\mathbb{N}$$

$$S_{n+p} = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{1}{i^2},\ n\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}$$

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\sum_{i=1}^{n+p}\frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p}\frac{1}{i^2}\right| = \sum_{i=n+1}^{n+p}\frac{1}{i^2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{n+p}\frac{1}{i(i-1)} = \sum_{i=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{n} - \cancel{\frac{1}{n+1}} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \cancel{\frac{1}{n+2}} + \ldots +$$

$$+ \cancel{\frac{1}{n+p-1}} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

Дакле, за $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1\ \forall n \geq N\ \forall p\in\mathbb{N}\ |S_{n+p}-S_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ конвергира

Коментар: Ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha>1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$

Редови са ненегативним члановима

Т. Ред са ненегативним члановима $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако $\exists M>0\ \forall n\in \mathbb{N}\ S_n \leq M$.

Т. (Поредбени критеријум): Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ редови са ненегативним члановима и нека $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N\ a_n\leq b_n$. Тада:

а) Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, тада конвергира и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

б) Ако ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, тада дивергира и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

1. Испитати конвергенцију следећих редова:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$

Како је $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos^2 i}{i(i+1)} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} =$

$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\ldots} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1,$

закључујемо да је низ S_n ограничен, па ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$ конвергира

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$

Како је $\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n} \leq \frac{\frac{1}{n}}{n} = \frac{1}{n^2}$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергира, то по поредбеном критеријуму конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n}$